

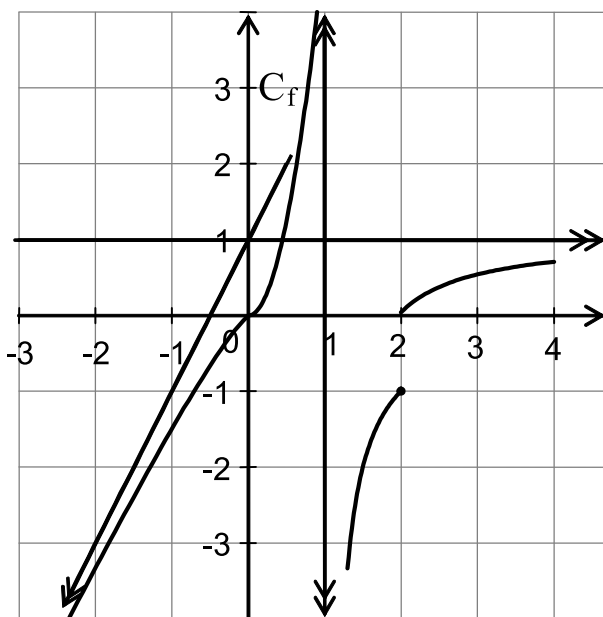
<b>L.B. Monastir</b>	<b>Devoir de Synthèse</b>	<b>3<sup>ème</sup> Math</b>
<i>Durée : 120 minutes</i>	<b>n : 1</b>	<b>06 / 12 / 2010</b>
<i>Prof: Ben Afia Moez, Hergli Riadh et Ali Louhaier</i>		

**Exercice 1 (3 points)**

L'élève doit remplir et remettre la feuille ci-jointe.

**Exercice 2 (4 points)**

On donne la figure ci-dessous dans laquelle on a tracé la courbe représentative d'une fonction f :



A l'aide d'une lecture graphique répondre aux questions suivantes :

- 1/ Déterminer  $D_f$  le domaine de définition de f. 0,5
- 2/ Déterminer les limites aux bornes de  $D_f$ . 1,00
- 3/ Etudier la continuité de f sur son domaine de définition  $D_f$ . 0,75
- 4/ Déterminer  $f(] - \infty, 1[)$ . 0,75
- 5/ Déterminer les équations des asymptotes à  $C_f$ . 1,00

**Exercice 3 (5 points)**

Soit  $f : x \rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} - m & \text{si } x \geq -1 \\ \frac{-2x^2 + 3x + 5}{x + 3} & \text{si } x < -1 \end{cases}$  m étant un paramètre réel.

$C_f$  est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé R du plan.

- 1/ Déterminer le domaine de définition de f. 0,5
- 2/ Calculer  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$ . Interpréter graphiquement le résultat. 0,75
- 3/ Discuter, suivant m, la continuité de f en -1. 0,75
- 4/a- Vérifier que  $\forall x < -3; f(x) = -2x + 9 - \frac{22}{x + 3}$  0,75
  - b- Montrer que  $\Delta : y = -2x + 9$  est une asymptote oblique à  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$ . 0,5
  - c- Etudier la position relative de  $C_f$  et  $\Delta$  sur  $] -\infty; -3[$  0,5



5/a- Vérifier que  $\forall x \geq -1; f(x) - x = \frac{3}{\sqrt{x^2+3} + x} - m$  0,5

b- Dédurre que  $\Delta': y = x - m$  est une asymptote oblique à  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$ . 0,75

**Exercice 4 (4 points)**

Soit ABC un triangle rectangle en A et de sens direct tel que

$$\widehat{(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})} \equiv \frac{1999\pi}{3} [2\pi].$$

1/a) Montrer que la mesure principale de  $\widehat{(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})}$  est  $\frac{\pi}{3}$  0,75

b) faire une figure. 0,5

2/ Désignons par I le milieu du segment [BC], J est le point d'intersection de la médiatrice de [AI] et celle de [BC].

a) Prouver que  $\frac{\pi}{6}$  est la mesure principale de chacun des angles orientés  $\widehat{(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CJ})}$  et  $\widehat{(\overrightarrow{CJ}; \overrightarrow{CI})}$ . 0,75

b) Montrer alors que  $\widehat{(\overrightarrow{JB}; \overrightarrow{JA})} \equiv \pi [2\pi]$ . 1,00

3/ Désignons par D le point d'intersection de (CJ) et  $\mathcal{C}$  le cercle circonscrit au triangle ABC. Prouver que DBA est un triangle isocèle en D. 1,00

**Exercice 5 (4 points)**

Dans la figure ci-contre :

ABCD est un trapèze rectangle en C et D  
 $DC=4; BC=4$  et  $DA=3$

$E \in [DC]$  tel que  $DE = 1$

1/ Montrer que 0,5

$$\widehat{(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB})} = \widehat{\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB}}$$

2/a- Calculer  $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EC}$  et  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB}$  0,5

b- En déduire que  $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = 9$  0,25

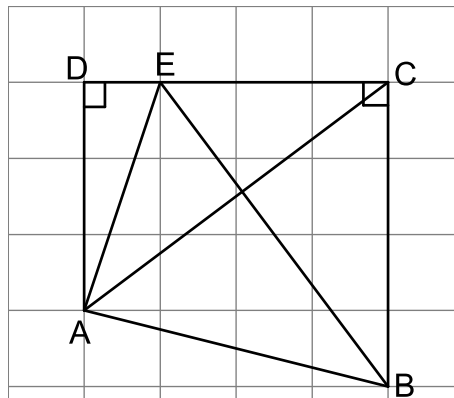
c- Calculer EA et EB puis  $\cos(\widehat{AEB})$ . 0,75

d- Montrer alors que  $AB = \sqrt{17}$ . 0,5

e- Calculer  $\cos(\widehat{ACB})$ . 0,5

3/ On muni le plan P par le repère orthonormé  $(D, \overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DE})$  avec J le point défini par  $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DA}$ . Soit l'ensemble  $(\Gamma) = \{M \in P \text{ tel que } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 6\}$

Montrer que  $(\Gamma)$  est un cercle dont on caractérisera. 1,00



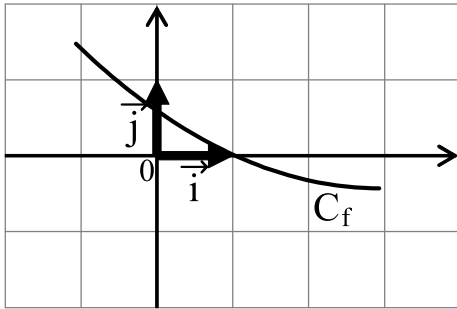
Nom : ..... Prénom: ..... Classe: .....

**Exercice 1 (3 points)**

Remplir les cases par : Vrai - Faux

1/ La fonction  $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$  est croissante et majorée sur  $\mathbb{R}^-$   0,5

2/ Dans la figure ci-dessous la courbe représentative d'une fonction  $f$



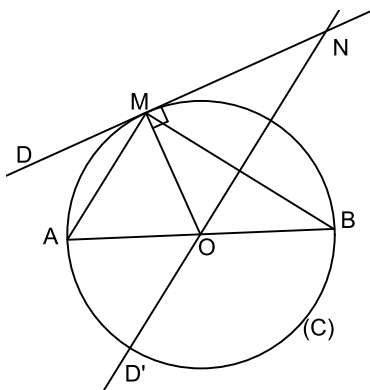
On  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$   0,5

3/ La fonction  $f: x \mapsto \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$  n'admet pas de limite en 2

4/ A, B et C sont trois points distincts du plan P. L'ensemble des points M tels que  $\vec{MA} \cdot \vec{AB} = \vec{CA} \cdot \vec{AB}$  est une droite.  0,5

5/ Soit  $f$  une fonction de courbe  $C_f$  dans un repère orthonormé du plan. Si  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  alors sa courbe  $C_f$  n'admet aucune asymptote verticale.  0,5

6/



D est la tangente à (C) en M et D' la médiatrice de [MB].

On a :  $\widehat{(\vec{MN}, \vec{MB})} \equiv \widehat{(\vec{ON}, \vec{OB})} \pmod{2\pi}$   0,5

**BON TRAVAIL**



**une correction du devoir de synthèse n:1**

**Exercice 1**

1/	2/	3/	4/	5/	6/
Vrai	Faux	Vrai	Vrai	Faux	Vrai

**Exercice 2**

1/  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2/  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ .

3/ f est continue sur son domaine de définition sauf en 2.

4/  $f(] - \infty, 1[) = ] - \infty, +\infty[$ .

5/ •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow D : y = 1$  est l'asymptote à  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$ .

•  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow D' : x = 1$  est une asymptote verticale à  $C_f$ .

•  $\Delta : y = ax + b$  est l'asymptote oblique à  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$ .

Le point de coordonnées (0, 1) appartient à  $\Delta$  donc  $1 = a \times 0 + b \Leftrightarrow b = 1$ .

Le point de coordonnées (-1, -1) appartient à  $\Delta$  donc  $-1 = a \times (-1) + 1 \Leftrightarrow a = 2$

Conclusion :  $\Delta : y = 2x + 1$ .

**Exercice 3**

1/  $f(x)$  existe  $\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq -3$

Conclusion : le domaine de définition de f est  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ .

2/ •  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{-2x^2 + 3x + 5}{x + 3} = -\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow -3^+} (-2x^2 + 3x + 5) = -22$   
 et  $\lim_{x \rightarrow -3^+} (x + 3) = 0$  et  $x + 3 > 0$  pour tout  $x > -3$ .

•  $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{-2x^2 + 3x + 5}{x + 3} = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow -3^-} (-2x^2 + 3x + 5) = -22$   
 et  $\lim_{x \rightarrow -3^-} (x + 3) = 0$  et  $x + 3 < 0$  pour tout  $x < -3$ .

On a : la droite d'équation  $x = -3$  est une asymptote verticale à  $C_f$ .

3/ •  $f(-1) = \sqrt{(-1)^2 + 3} - m = 2 - m$ .

•  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-2x^2 + 3x + 5}{x + 3} = 0$ .

•  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (\sqrt{x^2 + 3} - m) = 2 - m$

Ainsi :  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow 2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 2$

Par suite : Si  $m = 2$  alors f est continue en -1.

Si  $m \neq 2$  alors f est discontinue en -1.

4/a-  $\forall x < -3; -2x + 9 - \frac{22}{x + 3} = \frac{(-2x + 9)(x + 3) - 22}{x + 3}$   
 $= \frac{(-2x + 9)(x + 3) - 22}{x + 3} = \frac{-2x^2 + 3x + 5}{x + 3} = f(x)$ .

b-  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-2x + 9)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-22}{x + 3} = 0$

$\Rightarrow \Delta : y = -2x + 9$  est une asymptote oblique à  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$ .

c-  $\forall x < -3; f(x) - (-2x + 9) = \frac{-22}{x + 3} > 0$

Donc  $C_f$  est au dessus de  $\Delta$  sur  $] -\infty; -3[$ .





**une correction du devoir de synthèse n:1**

$$\begin{aligned}
 3/ \cdot \widehat{(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BA})} &= \widehat{(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CA})} [2\pi] \text{ car B et C sont dans } \widehat{DA}. \\
 &= \widehat{(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CJ})} + \widehat{(\overrightarrow{CJ}; \overrightarrow{CA})} [2\pi] \\
 &= 0 + \frac{-\pi}{6} [2\pi]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cdot \widehat{(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB})} &= \widehat{(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CB})} [2\pi] \text{ car A et C sont dans } \widehat{BD}. \\
 &= \widehat{(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})} + \widehat{(\overrightarrow{CJ}; \overrightarrow{CB})} [2\pi] \\
 &= 0 + \frac{-\pi}{6} [2\pi]
 \end{aligned}$$

Par suite  $\widehat{(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB})} [2\pi]$  ce qui permet de dire que DAB est un triangle isocèle en D.

**Exercice 5**

$$\begin{aligned}
 1/ (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}) (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}) &= \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} \\
 &= \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} \text{ car } \overrightarrow{ED} \perp \overrightarrow{CB} \text{ et } \overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{EC}
 \end{aligned}$$

$$2/a- \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EC} = ED \times EC \times \cos \widehat{DEC} = 1 \times 3 \times \cos \pi = -3.$$

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA'} \cdot \overrightarrow{CB} \text{ avec } A' \text{ est tel que } \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{DA}$$

Comme  $\overrightarrow{DA}$  et  $\overrightarrow{CB}$  sont colinéaires de même sens alors  $\overrightarrow{CA'}$  et  $\overrightarrow{CB}$  sont colinéaires de même sens par suite  $\widehat{A'CB} = 0$ .

$$\text{Ce qui donne } \overrightarrow{CA'} \cdot \overrightarrow{CB} = CA' \times CB \times \cos 0 = 3 \times 4 \times 1 = 12.$$

$$b- \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = -3 + 12 = 9.$$

$$c- \cdot EA = \sqrt{DE^2 + DA^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \text{ car DAE est rectangle en D.}$$

$$\cdot EB = \sqrt{CE^2 + CB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ car CEB est rectangle en C.}$$

$$\cdot \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = 9 \Leftrightarrow EA \times EB \times \cos(\widehat{AEB}) = 9 \Leftrightarrow \cos(\widehat{AEB}) = \frac{9}{5\sqrt{10}}.$$

$$\begin{aligned}
 d- \text{D'après El Keshi on a : } AB^2 &= AE^2 + EB^2 - 2EA \times EB \times \cos(\widehat{AEB}) \\
 &= 10 + 25 - 2 \times \sqrt{10} \times 5 \times \frac{9}{5\sqrt{10}} = 17
 \end{aligned}$$

$$\text{Par suite } AB = \sqrt{17}.$$

$$d- \text{D'après El Keshi on a : } AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2CA \times CB \times \cos(\widehat{ACB})$$

$$\text{donc } \cos(\widehat{ACB}) = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \times CA \times CB} = \frac{5^2 + 4^2 - \sqrt{17}^2}{2 \times 5 \times 4} = \frac{3}{5}$$

3/ Dans le repère  $(D, \overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DE})$  on a A(3,0) et C(0,4).

$$M(x,y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 6$$

$$\Leftrightarrow (3-x)(0-x) + (0-y)(4-y) = 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + y^2 - 4y = 6$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + (y - 2)^2 - 4 = 6$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})^2 + (y - 2)^2 = (\frac{7}{2})^2.$$

Conclusion :  $(\Gamma)$  est le cercle de centre le point de coordonnées  $(\frac{3}{2}, 2)$

et de rayon  $\frac{7}{2}$ .

